

Rozszerzenia ciał. II rok matematyki

- Zad. 1. Wypisać wszystkie elementy ciała $\mathbb{Z}_2/(x^2+x+1)$ oraz skonstruować tabele działań tego ciała.
- Zad. 2. Skonstruować ciało $\text{GF}(9)$.
- Zad. 3. W ciele $\mathbb{Z}_2/(x^3+x+1)$ obliczyć:
a) $(1+x) + (x+x^2)$, b) $(1+x) \cdot (x+x^2)$, c) x^4 ,
d) $\frac{1}{x}$, e) $\frac{1}{1+x+x^2}$, f) $\frac{x^2}{1+x}$.
- Zad. 4. Pokazać, że $(\mathbb{R} : \mathbb{Q}) = \infty$.
- Zad. 5. Określić stopień rozszerzenia $\mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt[4]{2})$.
- Zad. 6. Określić stopień rozszerzenia $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ oraz pokazać, że $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.
- Zad. 7. Wyznaczyć ciała rozkładu nad \mathbb{Q} następujących wielomianów:
a) $x^3 - 2$,
b) $x^4 - 2$,
c) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
- Zad. 8. Wykazać, że jeżeli f jest wielomianem nierozkładalnym nad ciałem K , to stopień ciała rozkładu wielomianu f nad ciałem K jest wielokrotnością stopnia f .
- Zad. 9. Wyznaczyć elementy pierwotne rozszerzeń:
a) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt[3]{3})$, b) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{5})$, c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{2})$, d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.
- Zad. 10. Wykazać, że istnieją dokładnie dwa automorfizmy ciała liczb zespolonych stałe na ciele liczb rzeczywistych.
- Zad. 11. Wyznaczyć wszystkie automorfizmy ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$
- Zad. 12. Wyznaczyć elementy grupy $G(L/\mathbb{Q})$, gdzie L jest ciałem rozkładu wielomianu $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.